

B2B ブランド品オークションにおける落札価格分布の推定

Estimating Distribution of Successful Bid Prices in B2B Luxury Brand Goods Auctions

幡本 昂平^{1*} 横山 想一郎² 山下 倫央² 川村 秀憲²

Kohei HATAMOTO¹, Soichiro YOKOYAMA², Tomohisa YAMASHITA² and Hidenori KAWAMURA²

¹ 北海道大学 大学院情報科学院

¹ Graduate School of Information Science and Technology, Hokkaido University

² 北海道大学 大学院情報科学研究院

² Faculty of Information Science and Technology, Hokkaido University

Abstract: An auction is an effective way to allocate goods whose value is uncertain. In B2B luxury brand goods auctions, where thousands of goods are listed at one time, it takes time to make a proper evaluation of the value of each goods. This is because the time required for bidding decisions increases in proportion to the number of goods. In this paper, we develop a method for estimating the distribution of successful bid prices for informing bidders and auctioneers of the value information in the B2B luxury brand goods auction. The information can help ease the burden of making bidding decisions. We confirm that our hierarchical bayesian estimation method is able to capture the price distribution of real-world bids with the accuracy close to that of the expert's estimation.

1 はじめに

オークションは財の価値が不明である場合に有効な、価格と割当対象を決定する手法の一つである。最近では Milgrom らが設計した周波数オークションの実用に関する研究にノーベル経済学賞が授与されるなど、オークションの実応用は社会的な注目を集めている。

最近ではオークションが様々な場面で用いられるが、一度のオークションで多数の商品が出品されている場合が多く存在する。一度のオークションで取り扱われる全商品についての入札判断にかかる時間はその数に比例すると考えられるため、買い手が全商品についての入札判断を行うのは困難であるといえる。このような状況が発生するオークションの顕著な事例として、企業間 (B2B) の卸売オークションが挙げられる。卸売オークションにおける参加企業は出品商品の中から自社の商品として取り扱う商品を選択し、入札価格を決定して入札をおこなう。同種の商品が多数出品されるため、参加企業は多くの商品から入札対象を決定する必要がある。入札判断の際は他社の評価額、自社の販路などを考慮する必要があり 1 商品あたりの判断に要する時間的コストが大きい。このため、商品数の増加

による参加企業の負担は大きくなりやすい。

前述の入札判断の困難さは、扱う商品に画一性がない場合に大きなものになる。このような商品の例に中古ブランド品がある。中古ブランド品は種類が多岐にわたり、同一の商品が出品されることは少ない。仮に型番上は同一の商品であっても、汚れ、傷、付属品の有無などの商品属性を加味すると、完全に同一の商品はほとんど存在しない。一般的に B2B オークションでは熟練の担当者が入札判断をしているため、現状ではうまく動作している。しかし、新規参加企業にとっては参加のハードルが高いという問題や出品商品数の増加により適切な入札の決定ができなくなるといった問題があると考えられる。

また、出品商品増による影響はオークションの主催企業側にも存在する。B2B オークションには出品商品のほとんどが主催者によるものである場合がある。このとき主催者は出品者とみなすことができ、多くの出品商品の価値を把握した上で留保価格や最小入札価格を設定する必要がある。現状では人手で落札価格の見積もりが行われているものの、商品すべてに対し正確に事前の見積もりをおこなうための時間的コストは商品数に比例して増加する。この結果、見積もりの精度が低下し、より高い価格で落札される機会の損失に気づかない場合が考えられる。

*連絡先：北海道大学 大学院情報科学院
〒060-0814 札幌市北区北 14 条西 9 丁目
E-mail: hatamotok@ist.hokudai.ac.jp

このような問題は採用するオークションメカニズムに関わらず発生し、オークションの安定的な運用を妨げる。いずれの問題も、出品商品の価値構造を熟練の担当者が暗黙的にのみ把握していることに起因している。したがって、オークション運営支援として出品商品の価値構造を揭示し、参加企業および主催企業が価値を把握できるようにする必要があるといえる。これを受けて、本論文では支援についての要素技術である価値の推定に関して、価値を反映していると考えられる落札価格について分布の推定をおこなう。対象とするのは中古ブランド品の卸売をオークションでおこなうB2Bブランド品オークションである。このオークションで取り扱われる商品はブランド時計・ブランドバッグ・宝石などであり、完全に同一の商品のデータが集まりづらいという特徴がある。さらに、中古車における機能のように、価値を推定する元となる特徴量として扱える情報が少ないため中古ブランド品に対し落札価格を推定する難易度は高い。本論文ではこの問題に対応するため階層ベイズによるモデリングをおこない、その有効性を確かめる。

さらに、推定結果を利用したオークション支援の枠組みについても検討をおこなう。

以下、本論文の構成を示す。第2章でオークションの実データを用いた研究やオークション支援について概観する。つぎに、第3章で本論文で取り扱うオークションについて説明する。第4章でオークションの落札価格を推定する手法について説明し、その有効性を確認するための実験について第5章で説明する。第6章で推定分布を利用したオークション支援についてその概要を述べる。

2 関連研究

実データを用いたオークションについての研究は、近年データ収集が容易になったことにより大きく進展している。おもにeBayや日本国内ではヤフオクのデータを用いた研究が多い。このような研究の例として、eBayにおける終了間際の入札をデータ上で発見した研究[1]がある。ヤフオクについても、データ分析をおこない出品戦略を明らかにしたもの[2]がある。

本研究で取り扱うB2Bオークションにおける出品商品の多さに対処する方法の一つに、商品の推薦がある。オークションは通常の購買と異なるため、従来推薦アルゴリズムの適用が難しく試みられた例ほとんどなかったが、最近ではオークションに特化した推薦アルゴリズムを開発しようという研究[3]がおこなわれている。

本論文で扱う落札価格の推定についても、数は少ないものの継続した取り組みが見られる。初期のものでは、Bajari and Hortacsu[4]がeBayにおいて多く取引

されるアメリカ硬貨のオークションについて入札分布をベイズ推定している。オークションにおける落札価格の予測に明示的に取り組んだものとしては、Ghani and Simmons[5]によるものがあり、落札価格の推定を回帰問題や分類問題に帰着させて一定の成果を出している。ただし対象はeBayに出品されていた一商品に限られている。この予測に関する研究はオークション開始前に予測をおこなう静的なものであるが、Wang et al.によりオークション開催中の情報も利用して落札価格の予測をおこなう方法が提案されている[6]。さらに、K-Nearest-Neighborsを利用した推定の研究[7]や、オークション中の価格変化により注目した研究[8]もなされている。

以上の推定に関する研究においては基本的に単一の商品に対する推定・予測をおこなっている。本研究では多数の類似商品があるが、同一の商品は少ないという特徴をもつ商品群に対する落札価格の推定手法の提案をおこなう。

3 B2Bブランド品オークション

本章では本論文で取り扱うB2Bブランド品オークションについてその概要を説明する。さらに、落札価格推定の適用対象となるデータについても説明する。

3.1 オークション概要

本論文で取り扱うB2Bブランド品オークションはパリュエンスジャパン株式会社が主催する、中古ブランド品を対象とするオークションである。主催企業が一般消費者から買い取りをおこなったブランド品を出品しており、基本的には出品者は単一である。参加企業は同種のオークション主催企業および一般消費者へのブランド品販売をおこなう古物商が中心であり、それぞれの在庫や販路などを考慮して入札判断をしているものと考えられる。以上のB2Bブランド品オークションの構造を図示したものを図1に示す。出品商品の価値は消費者・参加企業となる古物商・主催企業の3者の相互関係によって影響される。これに加えて、後述する完全に同一の商品が出品されることはまれであるという商品自体の性質により、入札判断は深い商品知識をもつ専門家でなければ難しい。

オークションは月ごとに出品する商品群を事前に決定し、基本的には各商品について入札者が入札価格を宣言する形式でのイングリッシュオークションがおこなわれる。オークションは対面で実施されているため、入札価格と入札者の情報はすべての参加企業に対して公開されている。商品群中の複数の商品に対する競り上げが同時におこなわれることはなく、1商品ずつ順

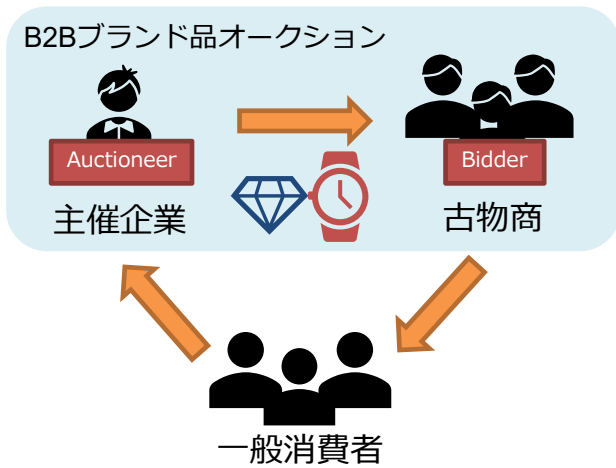


図 1: B2B ブランド品オークションの構造

次実施される。一部のオークションはインターネットを通じておこなわれているが、少量であるため本論文では同一のものとして扱う。

3.2 オークションデータ

本論文では実際に開催された B2B のブランド品オークションの落札履歴データを使用して、落札価格推定手法の検証を実施する。本データには 2018 年 8 月から 2019 年 7 月までの 1 年間に開催されたオークションにおいて出品された商品の属性情報と価格に関する情報が含まれている。商品は時計やブランドバッグ・ジュエリーなどいくつかのカテゴリに分類されるが、本論文では取引量の多いロレックスの時計について出品件数が年間で 100 件以上のものだけを対象とする。

データに含まれる商品情報には材質や時計固有の ID など様々な情報が存在するが、本論文ではロレックスの時計に関わらず時計において一般的に利用可能であると考えられる保証書の状態、商品ランクの 2 つを使用する。保証書の状態は、存在しない場合・国内正規品の場合・並行輸入品の場合の 3 つが存在する。有無は価格に大きい影響を与えるが、国内正規品と並行輸入品の違いは小さいと考えられるため、本論文では保証書の有無としてまとめて取り扱う。商品ランクは商品の傷や使用度合いに応じて決定される商品状態の良し悪しを表す値で、オークション出品前に専門の査定員により決定される。ランクは最低が C、最高が N であり、表 1 のように 8 段階からなる。ランクが高いほど落札価格も高くなる傾向がある場合が多い。

価格に関する情報としては落札価格と専門の査定員による見込み落札価格がある。オークションデータには各参加企業の入札価格は記録されていない。このた

表 1: 商品ランクの種類とその定義

商品ランク	説明
N	プライスタグや保護シールなどが付属しており、未使用と判断できる大変状態の良い商品
S	着用もしくは使用された形跡のない大変状態の良い商品
SA	数回の使用された形跡が見られるが、新品と遜色のない状態の良い商品
A	少々の使用感が見られるが、状態の良い商品
AB	目立たない汚れや、小傷などが見られる商品
B	使用による傷や汚れが見られる商品
BC	傷や汚れにより、外観に影響が出ている商品
C	通常使用にも支障が出るレベルの商品

め、オークションの結果として得られる価格情報は落札価格が唯一のものとなっている。査定員による見込み落札価格はオークション前の検品時に設定される予想落札価格である。人間の目による細かい情報や状態のチェックを踏まえた価格であるため、ある程度の正確さは担保されている。以降の章で説明する推定手法ではこの見込み価格と落札価格のずれを、推定精度を評価する一つの基準として用いる。

4 落札価格のモデル

本論文では落札価格に関する確率モデルを設計し、ベイズ推定を行うことで落札価格の予測分布を算出する。以下では確率モデルの概要と推定の方法について説明する。

4.1 確率モデル

本論文で取り扱うロレックスの時計は参加企業に落札された後、落札者によって消費者に販売される。したがって、落札価格は商品そのものの市場価値の不確実性だけでなく、落札者がいくらで販売できるかという見込みによってもばらつきが発生する量となっている。本論文ではこのいずれの不確実性も正規分布にしたがうと考える。また、保証書の有無は落札価格に影響を与えうることが事前のデータ分析から確認できた。これらを考慮したある型番 i のロレックスの時計の落札価格 v_i は以下の式で表現される。

$$v_i \sim N(\alpha_i + \beta_i g, \sigma_v) \quad (1)$$

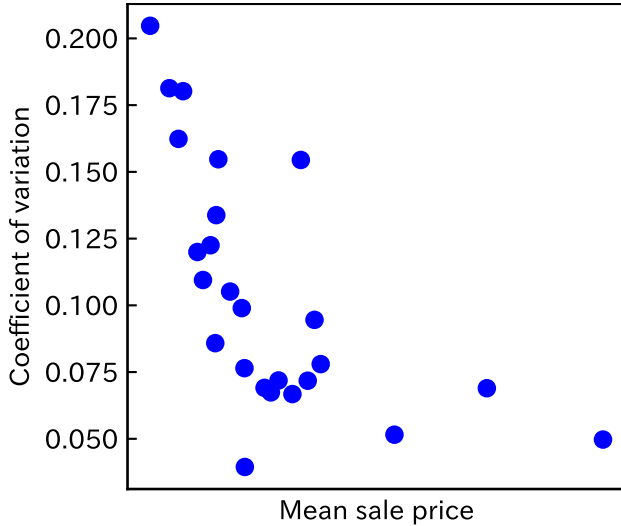


図 2: 各型番のロレックスの変動係数

ここで α_i は型番ごとの基本となる価格を表現する係数, β_i は保証書による落札価格への影響係数, g は保証書の有無を表すバイナリ変数, σ_v は全時計に共通の標準偏差である. α_i, β_i はそれぞれ以下の式にしたがう確率変数として, 階層モデルを構成する.

$$\alpha_i \sim N(\mu_\alpha, \sigma_\alpha) \quad (2)$$

$$\beta_i \sim N(\mu_\beta, \sigma_\beta) \quad (3)$$

ここで $\mu_\alpha, \sigma_\alpha, \mu_\beta, \sigma_\beta$ に関しては無情報事前分布として一様分布を設定する.

式 (1) のモデルではすべての型番について同様の標準偏差を仮定している. 本論文で取り扱うロレックスの時計の落札価格についてのある 3 ヶ月間の変動係数を図 2 に示す. 図示の際には希少個体であるために平均落札価格から大きく逸脱していると判断される商品は除外している. 変動係数の値は平均落札価格に応じてばらつきがあることがわかる. このことから, (1) 式の標準偏差は型番ごとに設定するのが適切であるといえる. この場合, モデルは以下の式で表される.

$$v_i \sim N(\alpha_i + \beta_i g, \sigma_{v_i}) \quad (4)$$

ここで σ_{v_i} の事前分布については, 自由度 4 の半 t 分布を設定する. 半 t 分布のスケールパラメータは図 2 から見積もられる最大の標準偏差に決定した.

上記モデルに商品ランクの情報を取り入れる. 商品ランクは商品の使用度合いを表す指標であり, 使用度合いが小さいほど落札価格が高くなる効果を持つと考えられるが, その効果がランクごとに等間隔でない場合がある. そのため, 各ランクについての価格に与える影響を別パラメータとしてモデル化する. さらに, 解釈しやすくするために式 (4) で表される価格に対して

積としての効果をもつようにする. モデルは以下の式で表される.

$$v_i \sim N((1 + \gamma_k)(\alpha_i + \beta_i g), \sigma_{v_i}) \quad (5)$$

γ_k はランク k の商品について価格を変動させる係数のような役割をもつ変数であるため, $[0, 5]$ の一様分布を事前分布として設定する. また, この際にランク C と BC の商品は出現頻度が低いいため同一のランクとして扱う.

4.2 推定

本論文では, 過去の落札価格データによるベイズ推定によりモデルのパラメータ分布を求める. 最終的なモデルにおける解析的な事後分布の計算は困難であるため, マルコフ連鎖モンテカルロ法 (MCMC) を用いる. MCMC サンプラとしては Stan[9] を利用する.

推定に利用するデータについては時系列的な変動を考慮する必要がある. ロレックスの時計の価値は為替や流通量, 人気度合いによって変動する. 変動はおおむね連続的であるが, ある型番の生産停止などの影響があると大きく変化する場合がある. これらの性質をふまえ, 推定に用いるデータは過去の全期間ではなく一定期間に限って使用するのが適切であると考えられる. これを実現するため, 月次のデータに対して, 新しい月に対する推定の前にパラメータ推定を再度おこない使用するモデルを更新する. 更新の際には前のモデルは用いず, 新しく一定期間のデータのみを利用してパラメータ推定をおこなう.

5 実験

本論文で提案した確率モデルの有効性, 推定に用いる適切なデータ期間について確認する.

5.1 実験設定

確率モデルにおけるオークションデータの性質の取り入れが妥当なものであることを示すため, 精度評価をおこないモデル間の比較を実施する. この際, 査定員の見込み落札価格による推定精度を人間の推定精度との比較のために用いる. 精度評価の指標には Mean Average Error (MAE), RMSE (Root Mean Squared Error) を用いる. 確率モデルは新規データについて落札価格の推定値を分布の形で出力することになるため, 事後分布からの MCMC サンプルの平均値を分布の代表値として各指標を計算する. Stan は Python インタフェースである Pystan から利用する.

表 2: モデルごとの MAE

test term	linear	hieararchical bayes	hieararchical bayes (fixed variance among ref. no.)	hieararchical bayes (with item rank information)	professional
2018/11	42352.27	40800.03	41224.24	38318.60	32137.50
2018/12	46016.67	44157.10	44016.26	42646.88	34115.85
2019/01	48548.77	45826.36	47142.55	46030.12	36598.43
2019/02	42267.00	39488.30	40018.53	36515.75	31696.43
2019/03	40328.70	39731.98	39777.38	39808.22	41588.24
2019/04	71932.15	70316.80	70484.26	70092.80	59408.28
2019/05	70464.01	68802.37	68784.30	67620.33	55538.65
2019/06	53450.35	49194.59	50487.79	48835.77	39036.12
2019/07	50122.38	47267.75	47275.89	48090.96	40259.38

表 3: モデルごとの RMSE

test term	linear	hieararchical bayes	hieararchical bayes (fixed variance among ref. no.)	hieararchical bayes (with item rank information)	professional
2018/11	63708.30	61620.96	62976.26	55966.77	47270.63
2018/12	96780.93	95637.75	95397.00	93711.86	50797.42
2019/01	67020.83	62914.33	64443.16	62998.46	50420.80
2019/02	56939.40	52479.74	52985.09	50574.83	50784.30
2019/03	55579.11	56309.36	56535.56	54434.69	55541.51
2019/04	121089.73	119033.99	119434.32	119476.84	88684.20
2019/05	127234.00	123438.58	124376.92	121336.01	85035.81
2019/06	96697.68	92760.37	94519.47	93765.13	64355.09
2019/07	71190.13	69328.60	68629.28	69807.02	58011.50

また、オークション支援においては分布の利用を考えているため、分布の精度評価も行う必要がある。分布に関しては人間が推定した基準値となる値が存在しないため、モデル間のみで比較をおこなう。指標としては以下の式であらわされる推定対象データの事後対数確率密度を用いる。

$$\log p(v^{test} | x^{test}, x^{train}, v^{train}) \quad (6)$$

この値の計算は文献 [9]27.1 章に示される方法にしたがって計算をおこなう。

評価は全データに対して時系列的な関係を保った上でクロスバリデーションでおこなう。具体的には、過去 m か月をパラメータ推定に用いるデータ期間とし次月を予測対象にするといったデータ分割を予測対象の月をスライドさせて各分割に対して精度を算出する。確率モデルの有効性を確認する実験の際には $m = 3$ に固定して実験をおこなう。

比較する確率モデルは式 (1), (4), (5) に基づくものに加え、階層モデル導入の有効性確認のため型番と保証書の有無をそれぞれ One-hot エンコーディングして結合したベクトルを変数とする線形回帰モデルについても対象とする。Stan のパラメータは反復回数 3000・チェーン数 4 に設定し、その他はデフォルトパラメータを利用した。

推定に用いる適切なデータ期間を求める実験の際には m を 1 から 5 まで変化させて、同じ予測期間のデータに対する MAE, RMSE などの前述の評価指標を用いて m による出力の違いについて考察する。

5.2 実験結果

5.2.1 確率モデルの有効性検証

各確率モデルについての評価指標の値を表 2 に示す。パラメータの収束の判断の指標となる Rhat はすべての場合について 1.1 以下であった。

線形モデルと (1) 式の階層モデルを比較すると、2019 年 3 月のテストデータ以外の場合で MAE と RMSE が線形モデルよりも小さい値となっており、階層モデル導入により型番ごとの落札価格分布が類似していることを考慮することができるため精度が改善しているといえる。また、型番ごとの標準偏差を導入した場合の (4) 式の階層モデルでは、RMSE と MAE に関しては変化がないか悪化しているという傾向がある。一方で対数確率密度の値は大きくなっており、分布としての性能向上に寄与していることがわかる。さらに、商品ランクを導入した式 (5) の階層モデルでは、2018 年 11 月から 2019 年 2 月で顕著であるが MAE と RMSE

表 4: モデルごとの対数確率密度

test term	linear	hieararchical bayes	hieararchical bayes (fixed variance among ref. no.)	hieararchical bayes (with item rank information)
2018/11	-4022.59	-4017.64	-3827.24	-3813.60
2018/12	-4074.47	-4058.23	-3918.91	-3904.46
2019/01	-4800.52	-4782.20	-4610.85	-4571.60
2019/02	-5589.08	-5573.15	-5414.34	-5375.38
2019/03	-1053.72	-1050.33	-1031.60	-1027.93
2019/04	-6205.32	-6155.30	-6022.37	-5993.68
2019/05	-5218.92	-5198.33	-5029.86	-5013.17
2019/06	-5631.63	-5627.13	-5391.29	-5356.50
2019/07	-4068.84	-4040.29	-3885.68	-3865.18

の値が (4) のモデルよりも改善している。その他の月に対しては悪化する場合は見られるもののその程度は小さい。このことから商品ランクの導入は年間を通じての推定精度の改善に貢献しているといえる。

確率モデルにより推定を行った場合と査定員の見込み落札価格の精度を比較すると、ほとんどの場合で査定員のもののほうが MAE, RMSE とともに値が小さいということが読み取れる。これは査定員が商品の価格を見積もりする際に用いている詳細な情報を確率モデルでは利用できていないことによるものであると考えられる。このような情報には例えば腕時計の文字盤に特殊な模様が入っているなどのものがあり、その情報の記述方法は型番ごとに固有のものとなっている。こうした情報は出現頻度も少なく、すべての商品で同一の変数を用いて表現することが困難であるため、現状ではモデルに組み入れることは難しいといえる。

5.2.2 パラメータに用いる期間の検証

パラメータ推定に用いるデータの期間 m を 1 から 5 まで変化させた場合の MAE と RMSE を表 5,6 に示す。 $m = 1$ で 2019 年 4 月をテスト期間とする場合は 2019 年 3 月のデータ数が少ないために Rhat が 1.1 以上のパラメータが存在したため、収束していないと判断している。

MAE, RMSE とともに、テストデータが 2019 年 4 月までの場合はほとんどの場合パラメータ推定に用いるデータ期間が長い場合のほうが値が小さいということがわかる。また、2019 年 5 月がテストデータである場合は MAE, RMSE とともにデータ期間が長いほど値が大きい傾向がある。2019 年 6 月についても $m = 5$ ではない月で誤差が最小となっている。この結果はロレックスの価値の時系列変化に応じて用いるデータ期間を変えるべきことを示唆している。具体的には、ロレックスの平均落札価格にあまり変化がない場合にはできるだけ長期のデータを利用し、急峻な変化がある場合

には直近のみを用いるという工夫が本推定手法の枠組みでは必要となると考えられる。

6 推定分布を用いたオークション支援

本論文で推定した分布を参加企業に掲示することで参加企業は分布の情報を利用して入札判断をすることができるようになる。ある入札価格が落札価格分布でどこに位置しているかを計算することで、落札確率をある程度見積もることができる。また、落札価格分布の平均値大きくを上回る過当競争を抑制できることが期待される。

主催企業はこれまでできなかった落札価格の平均と比べた高低を検証できるようになる。これにより、適切な留保価格設定の必要性や出品タイミングを調べられるようになることが期待される。

前章における推定分布は実際のデータ分布のヒストグラムと比較して大きく外れたものではなかったため、上記の支援は今回の推定モデルである程度可能であると考えられる。

7 おわりに

本論文ではオークションの落札価格の推定手法として、利用しやすい属性を用いた階層モデルを提案し、その精度が専門家の推定価格に近い正確さで落札価格を推定可能であることを明らかにした。専門家の推定価格と比較して、分布の客観的な情報を得られるところにオークション支援においての有用性がある。また、時系列的に変化する価値に対して推定期間を適切に定める必要性も明らかになった。

今後は本論文で扱わなかった時系列的な価値変動を確率モデルに取り込み、過去の蓄積データを有効に活用のできるモデル設計をおこなう。また、推定の結果

表 5: パラメータ推定に用いる期間ごとの MAE

test term	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$
2019/01	51198.50	47405.49	46030.12	40594.62	38517.67
2019/02	33328.72	37441.62	36515.75	35913.83	33905.49
2019/03	44816.63	44835.38	39808.22	37695.64	36409.25
2019/04	未収束	68017.99	70092.80	64380.06	63103.22
2019/05	51564.87	53240.90	67620.33	76371.45	75451.03
2019/06	49902.74	48495.28	48835.77	46142.45	48423.15
2019/07	43293.04	50453.88	48090.96	47376.92	39933.31

表 6: パラメータ推定に用いる期間ごとの RMSE

test term	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$
2019/01	71114.05	64033.95	62998.46	57246.00	56510.70
2019/02	47863.08	52545.93	50574.83	50469.18	47091.81
2019/03	62141.52	61109.86	54434.69	52579.52	51728.03
2019/04	未収束	117590.13	119476.84	113956.92	113039.39
2019/05	102687.09	105641.36	121336.01	131115.92	129813.16
2019/06	89513.86	93673.40	93765.13	92115.35	95255.67
2019/07	62238.07	71221.99	69807.02	69070.73	60282.31

は出品商品の価値構造として捉えることができ、オークション支援を導入した際の参加企業の行動変容による利益の変化などのシミュレーションにも有用である。

謝辞

本研究はバリュエンステクノロジーズ株式会社の皆様に情報の御提供、ならびに種々の御助言を賜りました。ここに深甚なる謝意を表します。

参考文献

- [1] Alvin E Roth and Axel Ockenfels. Last-Minute Bidding and the Rules for Ending Second-Price Auctions: Evidence from eBay and Amazon Auctions on the Internet. *American Economic Review*, Vol. 92, No. 4, pp. 1093–1103, August 2002.
- [2] Hiromichi Araki, Shigeo Matsubara, and Yuko Sakurai. Analysis of an internet auction market where ascending auction and fixed-price selling simultaneously exist. Web Science Conference 2010 (WebSci’ 10), April 2010.
- [3] Ahmed Rashed, Shayan Jawed, Lars Schmidt-Thieme, and Andre Hintsches. MultiRec: A Multi-Relational Approach for Unique Item Recommendation in Auction Systems. In *Fourteenth ACM Conference on Recommender Systems*, pp. 230–239, Virtual Event Brazil, September 2020. ACM.
- [4] Patrick Bajari and Ali Hortaçsu. The Winner’s Curse, Reserve Prices, and Endogenous Entry: Empirical Insights from eBay Auctions. *The RAND Journal of Economics*, Vol. 34, No. 2, pp. 329–355, 2003.
- [5] Rayid Ghani and Hillery Simmons. Predicting the end-price of online auctions. In *Proceedings of the International Workshop on Data Mining and Adaptive Modelling Methods for Economics and Management*, 2004.
- [6] Shanshan Wang, Wolfgang Jank, and Galit Shmueli. Explaining and Forecasting Online Auction Prices and Their Dynamics Using Functional Data Analysis. *Journal of Business & Economic Statistics*, Vol. 26, No. 2, pp. 144–160, April 2008.
- [7] Shu Zhang, Wolfgang Jank, and Galit Shmueli. Real-time forecasting of online auctions via functional K-nearest neighbors. *International Journal of Forecasting*, Vol. 26, No. 4, pp. 666–683, October 2010.
- [8] Ngai Hang Chan and Wei Wei Liu. Modeling and Forecasting Online Auction Prices: A Semiparametric Regression Analysis. *Journal of Forecasting*, Vol. 36, No. 2, pp. 156–164, 2017.
- [9] Stan Development Team. *Stan Modeling Language Users Guide and Reference Manual*, 2.19 2019. <https://mc-stan.org>.